RENTABILIDAD DE PORTAFOLIOS Y CRITERIO DE KELLY

La teoría de portafolios tradicional habitualmente utiliza promedios aritméticos para el cálculo de la rentabilidad. Esta columna, basada en un blogpost de Markku Kurtti en "Outcast Beta", se describe la aplicación del criterio de Kelly para determinar el promedio geométrico de la rentabilidad, que es la métrica correcta cuando se busca maximizar el retorno a largo plazo de un portafolio de activos. Los resultados son importantes para identificar los efectos de la variabilidad en los retornos de un portafolio en el tiempo.

Por Francisco Barañao, CFA.

En esta columna se comenta algunos conceptos importantes presentados por Markku Kurtti en su blogpost "*The Kelly criterion, capital market parabola & the almighty Sharpe ratio*"[1], donde el autor analiza las diferencias entre las decisiones de inversión en términos de su rentabilidad calculada como el promedio aritmético, y el promedio geométrico.

Es importante recordar la teoría de portafolios tradicional busca responder a la pregunta de cómo invertir maximizando el promedio aritmético de la rentabilidad. Es decir, una estrategia en la que se invierte cierta cantidad fija todos los años.

Por el contrario, el objetivo más habitual de un inversionista es buscar la estrategia que maximiza la rentabilidad de largo plazo, reinvirtiendo y componiendo las rentabilidades de cada período, y se calcula como el promedio geométrico, no el aritmético.

La diferencia se genera porque cuando la volatilidad de la rentabilidad es mayor a cero, la rentabilidad esperada geométrica es siempre inferior a la rentabilidad esperada aritmética. El ejemplo más simple es una inversión a dos años que renta 10% un año y -10% el otro: la rentabilidad es 0% calculada como la media aritmética, y -1% calculada como la media geométrica. Esta diferencia aumenta con la volatilidad y se llama "*volatility tax*", "*variance drain*" o "*variance drag*"[2].

Como ocurre en otros casos en finanzas, las herramientas matemáticas vienen recicladas de la física. En este caso, de la teoría de la información desarrollada por Claude Shannon y de su aplicación para la optimización de juegos de apuestas por Jonh Kelly, ambos en Bell Labs. Estas ideas fueron aplicadas más tarde en finanzas por Edward Thorp, un profesor de matemáticas y pionero del análisis cuantitativo.

Las hipótesis sobre las que se construye este criterio son muy generales y poco restrictivas. En particular, no se exige que los retornos tengan alguna distribución de probabilidades, ni tampoco se hace ningún supuesto sobre funciones de utilidad.

La maximización del retorno a largo plazo de un portafolio se consigue utilizando el "criterio de Kelly" aplicado en este caso a variables continuas, en vez de a apuestas individuales.

La fórmula del retorno esperado por sobre la tasa libre de riesgo es la siguiente[3]:

$$g - r = (m - r)f - \frac{s^2 f^2}{2} = fs(SR - \frac{fs}{2})$$

Donde:

[1] https://outcastbeta.com/the-kelly-criterion-capital-market-parabola-the-almighty-sharpe-ratio/.

[2] De acuerdo a Wikipedia, el término "*volatility tax*" fue publicado por primera vez por Rick Ashburn, CFA en una columna en 2003.

[3] La deducción de esta fórmula no es trivial. Ver citas en artículo original.

© 2024 CFA Institute. Todos los derechos reservados. Las opiniones expresadas son de responsabilidad de los autores y no representan necesariamente la posición de CFA Institute y CFA Society Chile.

g: Tasa anualizada de crecimiento geométrico esperada de un portafolio.

m: Tasa anualizada de retorno aritmético esperado.

r: Tasa libre de riesgo anualizada.

s: Desviación estándar anualizada del exceso de rendimientos geométricos.

f: Fracción invertida en acciones.

1-f: Fracción invertida en instrumentos libres de riesgo

SR: Ratio de Sharpe anualizado = $\frac{m-r}{s}$

El término $\frac{s^2 f^2}{2}$ corresponde a la "*variance drag*". Es decir, a la pérdida de rentabilidad en el largo plazo producto de la variabilidad de los retornos año a año, que aumenta con la desviación estándar y con la fracción invertida en activos de riesgo. Es interesante notar que el término f está elevado al cuadrado, lo que ya indica que la "*variance drag*" es muy sensible a fracción asignada a activos con riesgo, y que aumenta rápidamente con el apalancamiento.

El término $SR - \frac{fs}{2}$ corresponde al ratio de Sharpe geométrico anualizado.

Derivando la expresión anterior e igualando a cero para encontrar la fracción invertida en instrumentos de riesgo que maximiza el exceso de retorno geométrico, se obtiene que:

$$f^* = \frac{m-r}{s^2} = \frac{SR}{s}$$

Esta expresión indica la estrategia óptima para maximizar el retorno geométrico a largo plazo.

En términos de inversiones, la única forma de evitar este límite es no componer los retornos de un período para otro, a costa de sacrificar el crecimiento exponencial de la inversión en el largo plazo.

Reemplazando f^* en la fórmula del retorno esperado se obtiene que el exceso de retorno por sobre la rentabilidad libre de riesgo viene dado por:

$$g - r = \frac{SR^2}{2}$$

Es decir, el retorno geométrico máximo viene dado simplemente por la mitad del cuadrado del ratio de Sharpe. Es un límite matemático que aplica a cualquier proceso geométrico, no sólo a la rentabilidad de un portafolio. Este retorno máximo se obtiene cuando la fracción invertida en instrumentos de riesgo se determina como el ratio de Sharpe dividido por la desviación estándar.

Definiendo *c* como la fracción de activos invertidos según la fórmula de Kelly:

$$c = \frac{f}{f^*} = \frac{fs}{SR}$$

La fórmula del retorno esperado por sobre la tasa libre de riesgo se puede escribir como:

$$g - r = c(2-c)\frac{SR^2}{2}$$

Y la derivada es con respecto a *c* es: $(1-c)SR^2$

De esta forma se ve que el exceso de retorno en función de c es una parábola con un máximo de $\frac{SR^2}{2}$ cuando *c*=1, es decir cuando la inversión asignada a activos de riesgo es $\frac{SR}{s}$. Si *c* es 0,5, entonces el exceso de retorno esperado es $^3/_4$ del retorno que maximiza la tasa de crecimiento ("full Kelly"), con la mitad de la volatilidad. Cuando *c* es mayor a 2, el exceso de retorno esperado es negativo.

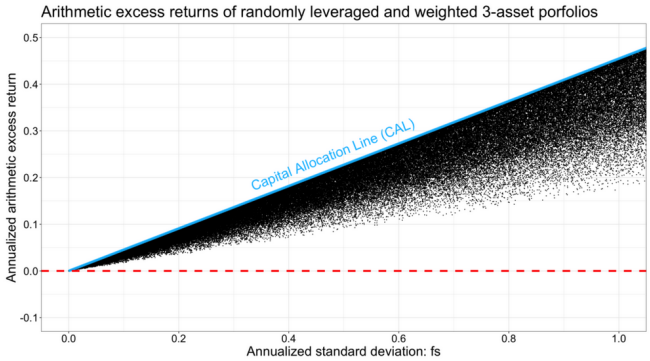
Es importante destacar que, en general, se considera que utilizar la proporción de activos de riesgo que maximiza la tasa de crecimiento (*f** o "full Kelly") es de mucho riesgo para la mayoría de los inversionistas, y por lo tanto se recomienda utilizar una fracción de esta asignación máxima. Esto se explica porque habitualmente no es posible conocer con precisión los parámetros para la aplicación de la fórmula.

El autor presenta luego los resultados de rentabilidad y desviación estándar de unos ejercicios de simulación con tres activos, a distintos niveles de apalancamiento.

De acuerdo a la teoría financiera tradicional, que busca optimizar el promedio aritmético de retorno, utilizando

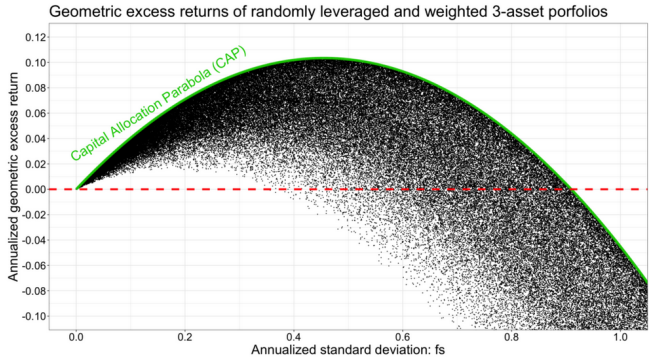
apalancamiento es posible aumentar ilimitadamente el retorno esperado, aumentando también el riesgo.

Los resultados de los promedios aritméticos muestran que, efectivamente, el apalancamiento aumenta indefinidamente el exceso de rentabilidad del portafolio, cuando se calcula como el promedio aritmético de los retornos.



Fuente: https://outcastbeta.com/the-kelly-criterion-capital-market-parabola-the-almighty-sharpe-ratio/

Los resultados para el caso en que la rentabilidad se calcula como el promedio geométrico son muy distintos:



Fuente: https://outcastbeta.com/the-kelly-criterion-capital-market-parabola-the-almighty-sharpe-ratio/

Ahora el apalancamiento sin límites ya no es tan atractivo, independiente de la tolerancia al riesgo. Tal como anticipa la fórmula, todos los portafolios simulados rentan por debajo de la tasa libre de riesgo cuando la proporción invertida en instrumentos de riesgo es superior a 2 veces “full Kelly”, que en este ejemplo corresponde a *fs* = 0,9.

La interpretación intuitiva de este resultado es que, cuando el portafolio se reinvierte todos los años, las rentabilidades bajan mucho cuando aumenta el riesgo porque resulta muy difícil recuperarse de períodos con rentabilidad muy baja (de hecho, es literalmente imposible si en un solo período el retorno es -100%). Esto no ocurre cuando, independientemente de los retornos obtenidos, se invierte el mismo monto todos los períodos. En este caso, por supuesto, se pierde el crecimiento exponencial del valor de la inversión en el tiempo.

Finalmente, es importante tener claro que en la práctica el portafolio que maximiza el ratio de Sharpe es el mismo utilizando la teoría financiera tradicional, que usando el criterio de Kelly. La diferencia está en la evolución del portafolio en el tiempo, no en la selección de activos del portafolio.